

感謝

應試指南是化繁為簡，讓評量內涵的溝通更為人性有效的重要工作之一，各位老師不辭勞苦，遠從全臺各地齊聚國立臺南大學，貢獻豐富的基礎教育實務經驗，讓 PISA 中心提議的初稿，更臻完整也更具實用價值。此刻你看到的，正是各位老師與 PISA 中心的共同產出。然而這只是路程的一半而已，它需要透過你再傳授到受測學生的腦子裡，才算完滿。

在此，PISA 中心除了衷心的感謝，下列參與本應試指南編修的諸位老師外，你熱心地將此指南，傳授給受測學生，達成編修此指南的預定目的，PISA 中心在此一併表示感謝。至於，大家願意把教育的範疇，往外多跨一步，讓臺灣的基礎教育與國際標準無縫接軌，則不是感謝兩字所能表達的。

大仁國中 廖惠儀老師	大同高中 蕭新雄老師	永康國中 林柏寬老師
北港國中 孫明山主任	北興國中 莊雅清老師	吉安國中 蔣翠蓮組長
芎林國中 徐華助主任	東山高中 朱弘信老師	虎林國中 李宓風老師
英明國中 顏錦偉老師	建興國中 陳俐利老師	麻豆國中 王儀雅老師
福和國中 李進福老師	瑞峰國中 蔡秋菊主任	興雅國中 林壽福老師
興華高中 蘇柏奇老師	麗山國中 張榮和老師	維真國中 沈紀伶輔導員

臺灣 PISA 國家研究中心

目 錄

壹、前言.....	1
貳、PISA 數學素養評量.....	3
一、PISA 2012 數學素養的概念與定義.....	3
二、數學素養的內容領域.....	4
三、數學素養的數學歷程.....	7
四、數學素養的情境脈絡.....	8
五、數學素養的試題類型.....	9
參、數學素養樣本試題應用調查.....	10
一、樣本試題的結構與應用流程.....	10
二、分析結果與討論.....	10
肆、數學素養評量的應試注意事項.....	13
一、使用輔助工具.....	13
二、閱讀注意事項.....	14
三、作答注意事項.....	15
伍、結語.....	17
陸、樣本試題與學生作答反應分析示例.....	18
大陸面積.....	18
賽車速度.....	21
搶劫.....	24
柒、參考文獻.....	27

壹、前言

在全球化浪潮的衝擊下，所有國民都將面臨無國界的競爭。國家競爭力的強弱關鍵在於研究人力，而研究人員的優劣取決於其所具備的數理能力。數學能力佳，思考能力愈強，解決問題能力愈快。惟有不斷思考、創新，才能締造新局。正所謂「數學力等於競爭力」。

數學是研究邏輯的源頭，是類比、推理的基礎。數學能力是日積月累漸漸養成，思考能力的培養也非一蹴可及，單憑學校教科書的基礎知識，無法因應時代的競爭與挑戰。教科書只是多元素材的一種，涵蓋的知識有限。因此，除了從教科書習得的基本學習能力外，學生還需培養更一般化的終身學習能力與習慣，以利提升國民的創造力與競爭力。

學生是否能將習得的數學知識、技能，靈活地運用在解決生活問題？經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development，簡稱 OECD）發展的國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment，簡稱 PISA），期望透過每三年一次針對 15 歲學生進行調查，提出具體的參考資訊。臺灣於 2006 年首次參與 PISA，在數學方面表現亮眼，拿下世界第一。雖然成績優秀，但評量結果顯示臺灣學生的數學素養有很大的個別差異。三年後的 PISA 2009 評量，臺灣學生的數學成績略為退步，排名也從第一降為第五，結果再次證明了臺灣在數學教育仍有不足之處。此外，PISA 2009 評量還提供了另一個警訊，高分群的學生（也就是競爭力強的學生）比例正在下降中。但從另一個角度來看，這些評量的結果和警訊正好是提供我們一個教育改革的契機。

PISA 評量自 2000 年起，每三年進行一次調查，評量的試題是由世界各國的專家所共同研發，取材廣泛，涵蓋各種生活情境中的問題。雖然臺灣學生的數學能力整體來說是相當不錯，但面對與學校評量內容、型式差異頗大的數學素養評量，難免會有陌生、甚至害怕，進而影響作答，無法發揮實力。有鑑於此，臺灣 PISA 國家研究中心，彙整一些應試指南和作答技巧，提供給教師和學生作為準備 PISA 數學評量的參考，期望學生能在評量中發揮真正的實力。

本手冊的內容包括介紹 PISA 數學素養、分析其評量架構所對應的數學素養內涵以釐清評量焦點、協助學生掌握 PISA 數學評量設計的核心、並參考樣本試題的測驗結果洞察學生答題常犯的錯誤。最後，提出 PISA 數學素養評量的作答建議和策略。

貳、 PISA 數學素養評量

隨著社會、經濟和文化的發展，在解決日常生活中面臨的問題和狀況時，所需的數學知識、數學推理以及工具運用技巧的比重愈來愈高。不論在何種情境下，數學是年輕人遭遇問題時最重要的工具。因此，瞭解年輕人離開學校後是否能使用數學分析問題，進而解決這些問題，成為一項重要的課題。

我們預期 15 歲學生所需具備的數學知識為何？學生在解數學問題時經驗的相關歷程是什麼？當學生的數學素養能力增加時，我們預期 15 歲學生能表現出什麼樣的能力？何種情境脈絡中數學素養可以被察覺和評量？PISA 數學素養評量即是針對這些問題而設計的測驗，目的在於評量「15 歲學生在面臨真實生活情境中的各種問題和挑戰時，能否熟練地將數學應用在解決這些問題」。

瞭解數學素養評量的定義與內涵，有助於老師與學生掌握 PISA 數學評量設計的核心、面對 PISA 數學評量。在此，我們將分別介紹 PISA 數學素養的定義與 PISA 數學素養評量的內涵，其中評量的內涵分為「內容領域」、「數學歷程」、「情境脈絡」三個向度來進行簡介；此外，PISA 因應試題內容的適切性而有不同的題型設計，此部分將在「評量試題類型」進行說明。

一、 PISA 2012 數學素養的概念與定義

PISA 2012 定義數學素養¹為：數學素養是個體在不同情境脈絡中，形成、應用以及詮釋數學的能力，其包含數學推理、和數學概念、程序、事實以及工具的運用來描述、解釋和預測數學現象。數學素養輔助個體辨識數學在世界中所扮演的角色，並且能做出具建設性、投入性及反思能力公民所需具備的周延有據之判斷和決策。

¹ PISA 2012 數學架構 (OECD, 2010) 裡的數學素養定義：

Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts, and tools to describe, explain, and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens.

PISA 運用不同生活情境脈絡中的試題來評量學生的數學素養，主要的情境脈絡包括個人(personal)、社會(social)、職業(occupational)或科學(scientific)四類。評量時，PISA 視學生為問題的解決者，強調學生是否能主動在這些情境脈絡中使用數學。這樣的定義下，有以下幾個重點：

1. 視學生為積極的問題解決者

在數學素養的定義中，著重在數學的積極參與，其涵蓋了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋及預測現象。尤其是在「形成」、「應用」與「詮釋」三個歷程中，學生將主動從事問題解決。PISA 數學架構中最重要基礎 — 數學建模的概念。使用數學以及數學工具解決問題時，需經歷一系列不同的歷程，稱為數學建模循環，如圖 1 所示。數學建模開始於「情境脈絡中的問題」，解題者嘗試在問題情境中找出相關的數學並且根據概念、關係界定和簡化假設來形成(*formulates*)數學情境，然後解題者將「情境脈絡中的問題」轉化為「數學問題」而得以進行數學處理。然後解題者應用(*employs*)數學概念、程序、事實以及工具來找出「數學結果」，這階段包含了數學推理、操弄、轉換以及計算。接著，「數學結果」素需要依據原始問題(「情境脈絡中的問題」)來進行詮釋(*interprets*)，這包含解題者對於數學結果及其在真實世界脈絡合理性的詮釋、應用、以及評估。形成、應用、以及詮釋數學的這些歷程是數學建模循環系統的關鍵成分，同時也是數學素養定義的核心。

上述所提到的數學建模循環是在實務運作的數學素養一個理想且簡化的解釋，雖然通常並不必然在建模循環中的每一個階段都必須投入。它往往是數學建模週期的重要部分，在已被他人進行的情況下，最終的使用者執行了建模週期的某些步驟，但不是全部。舉例而言，在某些情況下，數學表徵，例如圖表或方程式，可以直接操弄來以回答一些問題或者得到某些結論。

基於這個原因，許多 PISA 的試題只有涉及建模循環的部分。在現實中，解題者有時可能會在歷程、與回頭重新審視先前的決定和假設之間來回擺盪。

實務中的數學素養

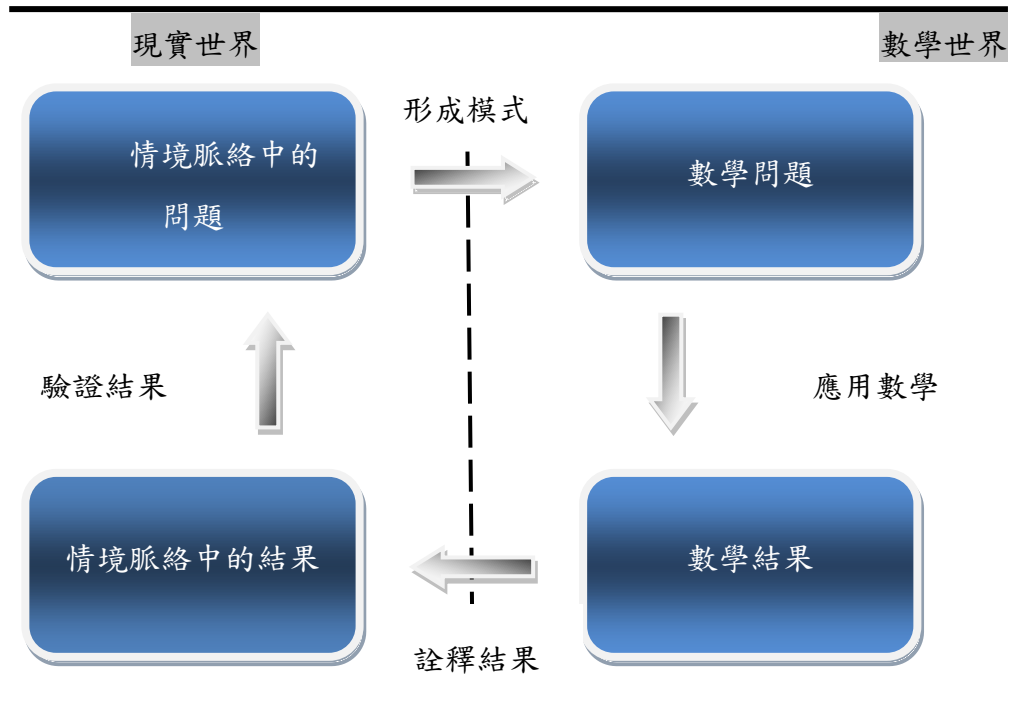


圖 1 實務中的數學素養

2. 將問題明確連結各種情境脈絡

數學素養定義中提到的「各種情境脈絡」是有目的的，旨在透過連結特定情境脈絡（個人，職業，社會，科學），反映個體在真實世界中可能碰到的數學機會。該定義也確認了數學素養關鍵作用在於協助個體認識數學在世界上扮演的角色，而能進行周延有據的判斷和決策，成為具建設性、投入性及反思能力公民。

3. 界定數學工具（包含科技）的明確角色

數學素養的定義明確包含數學工具的使用。這些工具包括各種實體和數位的設備、軟體以及計算器具。電腦化工具是 21 世紀工作場所中相當常用且隨著世紀的進步越來越普遍。工作相關問題以及邏輯推理的本質也擴展了這些工具使用的新機，也因此創造出數學素養的新期望。

二、 數學素養的內容領域

數學的內容領域分成「改變與關係」、「空間與形狀」、「數量」、「不確

定性（與資料分析）」四大項。不論是在個人、社會、職業或科學任何一種情境裡，這四項數學領域對現代公民而言，是最基本也是最重要的。這四項內容領域說明如下：

（一）數量

數量是生活中常遇到的最基本與最普遍的數學觀念。生活中的各種特徵和現象都需要藉由量化來描述或測量，量化後即是數量的處理。數量主要包括測量、計數、指標、相對大小、趨勢和模式。例如：數的概念、數字的運算、心算、估計和評估。

（二）空間與形狀

包括生活中可見的各種現象，像圖形、物體的性質、位置與方位、影像的編碼與解碼、以及動態幾何圖形。此外，形體、影像或視覺表徵間的關係，如真實城市和該城市的地圖（照片）間的差異，以及三維物體的二維表徵、陰影的形成與意涵、視角的確認和運作、全球定位系統（GPS）等都屬於空間與形狀。

（三）改變與關係

改變與關係的重點在於如何以數學模式描述自然界裡各種暫時性和永久性的關係，例如有機體的改變、生長、四季循環、潮起潮落、失業的循環、天氣改變等。這些模式有的具有時間性，有的則會因為其它因素的變化而產生改變。除了模式的建立之外，還包括模式的解釋、數學符號和圖形的轉換。例如：函數、代數與符號的使用、以及表格和圖形的呈現。

（四）不確定性（與資料分析）

包括理解生活中各種造成變異的成因、具有量化和解釋變異的能力、測量時所隱含的不確定性的知識以及機率統計的問題。例如：選舉結果、天氣預測、經濟模型的變動。

這四個數學內容形成的領域廣泛，一方面可確保試題散佈於課程之中，同時又可避免太過明確而違反真實情境問題解決的憂慮。

PISA 2012 數學試題在各內容領域所佔的百分比如表 1 所示。

表 1 PISA 2012 數學素養評量各內容領域的比例

改變與關係	空間與形狀	數量	不確定性 (與資料分析)	合計
25%	25%	25%	25%	100%

針對這四大內容領域，PISA 認為適合用來評量 15 歲學生的主題如下：函數、代數、方程式與不等式、座標系統、二維與三維幾何物件的幾何關係、幾何測量、數與單位、算術運算、百分比、比值和比例、估計、資料的收集和呈現、資料變異性及其描述、樣本與抽樣、機會與機率。

三、 數學素養的數學歷程

數學歷程主要是描述從問題的釐清與解決問題的過程中，學生需要將情境和數學所做的連結，以及歷程背後為了解決問題所需要被引導出來的能力。

PISA 2012 的數學歷程最主要步驟有三項：

1. 形成數學情境(Formulating situations mathematically)：「形成」數學包含界定應用或使用數學的機會，將問題情境轉變成一種適合進行數學處理、提供數學結構與表徵，以幫助迎接挑戰或是解決問題的型態。
2. 應用數學概念、事實、程序以及推理(Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning)：「應用」數學包含使用數學推理以及數學概念、程序、事實與工具來推導出數學解法；其中包括了執行計算，操弄代數式、方程式，分析數學圖表的訊息，發展數學的描述與解釋，以及使用數學工具來解決問題。
3. 詮釋、應用以及評鑑數學結果(Interpreting, applying and evaluating mathematical outcomes)：「詮釋」數學則涉及在挑戰或問題的情境脈絡下，對於數學解法及結果的反思與詮釋，並決定這些結果在此情境下是否合理且有意義。

PISA 指出每個人在使用數學解決不同情境中所遭遇的問題時，並不一定需要整個數學建模循環的完整過程，有時只需利用表格資訊做簡單的計算或做一些

數學推論或論證。因此，PISA 的試題多數只涉及部分的過程，可能與形成模式有關、或是與數學計算有關、或是與數學結果的詮釋或驗證答案在真實情境中是否合宜有關。PISA 2012 數學試題在各歷程所佔的百分比如表 2 所示。

表 2 PISA 2012 數學素養評量各歷程的比例

形成	應用	詮釋	合計
25%	50%	25%	100%

四、 數學素養的情境脈絡

使用合適的數學方法與表示式通常與個人的數學思考方式有關，而思考方式則會與問題的情境有關。PISA 試題的情境脈絡分成「個人」、「職業」、「社會」與「科學」四大類，盡可能包含各式各樣學生感興趣的情境，使學生有效地運用他們的數學知識，這四類的說明如下：

1. 個人：設定在與學生本身、學生的家庭或同儕群體有關的情境，例如：稅款、飲食、購物、健康。
2. 職業：以實際工作的情境為中心，例如試算表工作表單的使用、品質管制、設計。
3. 社會：與個人的公眾事務有關的情境，例如選舉、公共政策、經濟。
4. 科學：設定在必須應用數學知識的科學議題情境上，例如天氣、生態與環境、醫學、測量。

雖然 PISA 數學素養試題的情境分成不同類別，但最重要的目的是要評量 15 歲學生需要具備的數學知識和能力，因此在 PISA 2012 的數學架構中強調，試題必須與學生本身的興趣與生活相關，才能評量出學生是否能為具積極性、投入性及反思能力的現代公民。在 PISA 2012 的數學試題裡，各情境脈絡的百分比如表 3 所示。

表 3 PISA 2012 數學素養評量各情境脈絡的比例

個人	職業	社會	科學	合計
25%	25%	25%	25%	100%

五、 數學素養的試題類型

PISA 數學試題使用四種題型：選擇題、多重是非題、封閉式問答題以及開放式問答題，其中選擇題、多重是非題+封閉式問答題、開放式問答題的比例各約為 1/3。

(一) 選擇題

每個選擇題有四~五個選項，只有一個正確答案。

(二) 多重是非題

多重是非題包括由二~四題是非題所組成的，通常必須全對才能得分。選擇題與多重是非題可以用來測量數學的理解歷程，然而卻無法讓學生進一步解釋和提出支持或反對的論點，因此，PISA 除選擇題外還有問答題。

(三) 封閉式問答題

封閉式問答題通常會先要求學生從「是」或「否」兩個正反面的立場中圈選出合理的答案，再要求提供計算或數學論證來支持自己所選擇的答案。

(四) 開放式問答題

開放式問答題的主要目的在於讓學生自己建構答案，由作答者提出自己的觀點以及支持的理由和論證。開放式問答題由數學領域專家進行人工閱卷，根據學生的作答反應進行評分。評分時，依據學生理解的程度，評判為滿分、部分分數、或零分，不會因為書寫表達能力不好而扣分。

參、數學素養樣本試題應用調查

為了更瞭解學生在 PISA 數學素養評量作答的問題，我們利用 PISA 樣本試題 (released items)，對六所國中的學生進行調查，根據測驗的結果探討學生在作答時常犯的錯誤，以提供我們撰寫應試指南更豐富的參考資訊。

一、樣本試題的結構與應用流程

參與此次測驗調查的學生人數共有 398 人，其中有 218 人是八年級學生，有 180 人是九年級學生。本次的測驗題本有二式 (題本 A 和題本 B)，每式題本各有 21 個問題 (參見表 4)，其中有 193 位學生使用測驗題本 A；有 205 位學生使用測驗題本 B。

每位學生只作答一份試題 (題本 A 或題本 B)，測驗時間為一節課，約 45 分鐘。施測時間為 100 年 4 月至 6 月。

二、分析結果與討論

(一) 分析結果

本次的分析，我們以答對率作為比較。下表列出國際答對率與本次測驗答對率的對照。

表 4 樣本試題答對率

測驗題本 A				測驗題本 B			
試題	PISA 2000 答對率	PISA 2003 答對率	本次 測驗 答對率	試題	PISA 2000 答對率	PISA 2003 答對率	本次 測驗 答對率
M037Q01 農場	0.61		0.87	M148Q02 大陸面積	0.19		0.18
M037Q02 農場	0.55		0.74	M150Q01 成長	0.62	0.67	0.55
M124Q01 步行	0.34	0.36	0.71	M150Q03 成長	0.46	0.45	0.03
M124Q03 步行	0.19	0.21	0.44	M161Q01 三角形	0.58		0.66
M136Q01 蘋果	0.49		0.92	M402Q01 網路通訊		0.54	0.65
M136Q02 蘋果	0.25		0.70	M402Q02 網路通訊		0.29	0.22
M136Q03 蘋果	0.13		0.34	M413Q03 匯率		0.40	0.48
M145Q01 骰子	0.58	0.68	0.74	M438Q01 外銷出口		0.79	0.80
M159Q01 賽車速度	0.67		0.57	M438Q02 外銷出口		0.48	0.67
M159Q02 賽車速度	0.84		0.82	M467Q01 彩色糖果		0.50	0.78
M159Q03 賽車速度	0.83		0.79	M468Q01 科學測驗		0.47	0.82
M159Q04 賽車速度	0.28		0.41	M484Q01 書架		0.61	0.80
M179Q01 搶劫	0.26	0.30	0.33	M513Q01 測驗分數		0.32	0.51
M266Q01 木匠	0.20	0.20	0.64	M520Q01 滑板		0.72	0.73
M413Q01 匯率		0.80	0.86	M520Q02 滑板		0.46	0.63
M413Q02 匯率		0.74	0.80	M520Q03 滑板		0.50	0.49
M505Q01 廢棄物		0.52	0.48	M547Q01 樓梯		0.78	0.83
M509Q01 地震		0.46	0.62	M555Q02 數字方塊		0.63	0.74
M510Q01 選擇		0.49	0.39	M704Q01 年度風雲汽車		0.73	0.81
M702Q01 總統的支持度		0.36	0.52	M704Q02 年度風雲汽車		0.25	0.51
M413Q03 匯率		0.40	0.48	M806Q01 階梯樣式		0.66	0.90

註：標記灰底表示本次測驗答對率 < 國際答對率

整體而言，臺灣學生在大部分的試題都比國際平均表現好；只有在部分的試題表現上臺灣學生的答對率較低，包括 M159Q01~M159Q03 賽車速度、M505Q01 廢棄物、M510Q01 選擇、M148Q02 大陸面積、M150Q01 和 M150Q03 成長、M402Q02 網路通訊以及 M520Q03 滑板。其中 M150Q03 成長，可能因為翻譯不夠明確以及學生對於此種題型作答方式不夠熟悉，導致臺灣學生本次測驗的答對率只有 3%。此外，有部分的試題本身涉及的認知難度比較高，所以答對率都不高，例如：M179Q01 搶劫、M402Q02 網路通訊。

(二) 學生常犯錯誤

根據這次的測驗的表現分析，學生常犯錯誤如下：

1. 不清楚題目的用意或不懂題目在問什麼。
2. 沒有仔細閱讀題目。
3. 不熟悉利用數學推理和論證來支持自己論點的作答方式。
4. 粗心、計算錯誤。
5. 主觀的陳述自己對問題的看法，忘記或忽略使用題目中的資訊。
6. 比例尺用錯或未使用比例尺轉換成實際的數值。
7. 未注意單位不同或忘記換算。
8. 未注意 xy 座標軸的單位，及其代表的意義。
9. 沒有作答。

這些錯誤有時是可以避免的，若能避免則可讓具有能力的學生獲得應有的分數，而不會低估了學生的成績。

肆、數學素養評量的應試注意事項

PISA 評量是三年一次的國際性評量，對臺灣學生而言，評量結果與在校成績無關，也與升學無關，因此常常導致學生在評量時沒有盡力作答。評量前對學生的解說與士氣鼓舞是很重要的。曾參加過 PISA 評量的學校主任表示，他們在評量前會以『國手』來稱呼參與評量學生、會主動利用公布試題讓學生練習，了解素養評量、甚至會幫參加評量的學生記小功，獎勵學生。這些方式都能有效的提升學生作答動機。

從歷屆的 PISA 評量結果以及本次 PISA 數學素養公布試題的測驗顯示，學生面對評量時的作答技巧仍有進步空間，特別是在洞察問題的題意與內涵，以及在開放式問題的作答方面，學生表現不佳，需要更多的指導和學習。因此，我們提出一些有關數學素養評量的作答建議，作為老師們在指導學生時的參考。

一、使用輔助工具

1. 善用題本提供的公式

數學素養試題旨在評量學生是否能解決真實生活中可能面臨的問題，而不是測驗學生背誦、記憶公式的能力。題本（封面內頁）有提供部分公式，評量時可善加利用。例如體積、面積的公式、圓周率 π （ $\approx \frac{22}{7}$ ）。

2. 運用測量工具與計算機

PISA 評量可以使用各種測量工具解決問題，例如長度、面積等的計算與估測。因此，作答時建議使用測量工具（例如：直尺、圓規與量角器），可以提高測量的準確性。此外，遇到大數或比較繁複的計算，可以使用計算機作為輔助，以避免計算錯誤或誤差過大。

二、 閱讀注意事項

1. 仔細讀題、洞察題意

情境試題的題幹敘述通常較一般試題長，因此要仔細的閱讀題目，才能理解題意，做出正確的判斷和回答。

2. 面對挑戰、勇於嘗試

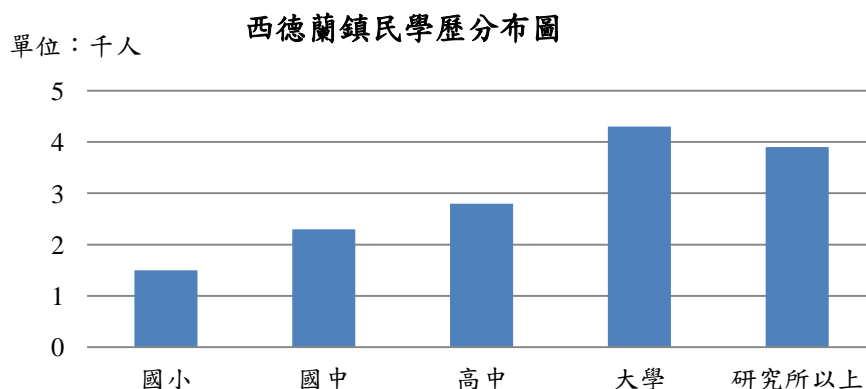
PISA 試題包含「個人」、「職業」、「社會」與「科學」四種情境脈絡，雖然 PISA 試題是以學生感興趣或生活週遭的情境為主，但各國文化風情不同，且每位學生的生活歷練也有差異，因此，作答時可能會遇到不熟悉的情境或挑戰。對於特殊的情境，PISA 試題中都會有概略的介紹，至於會影響作答的事物或專有名詞，也都會有明確的定義或說明。所以，不必害怕回答那些陌生的情境試題，也不要放棄作答。

3. 透析圖表、正確解讀

PISA 試題中通常會附有統計圖形或表格數字，答案大部分都可從在圖表中擷取獲得，有時需要將數據作進一步的運算或轉換。在資料擷取部份要注意：

(1)統計圖中縱軸和橫軸的單位及其代表的意義

如下圖，縱軸數字的單位為「千人」，因此具有小學學歷的西德蘭鎮民的人數大約有 1500 人，而非 1.5 人。另外，「單位：千人」有不同的表示方式，例如「單位：1000」或「× 1000」，解讀時需要特別留意。



(2) 表格數據的意義

「平均」、「總量」和「比例」是不相同的，在引用這些數據作比較時，要特別小心。如下表，西德蘭農場裡每棵蘋果樹「平均」的產量比東德蘭農場多（ $100 > 90$ ），但若要比較「總產量」則要考量農場所種植的蘋果樹數量（東德蘭農場的總產量為 $80 \times 90 = 7200$ ；西德蘭農場的總產量為 $50 \times 100 = 5000$ ），不能只比較「平均」值。

	每棵蘋果樹的平均產量	蘋果樹數量(棵)	每棵蘋果樹頂級蘋果的收成比例
東德蘭農場	90	80	60%
西德蘭農場	100	50	60%

另外，在比較「比例」時也要小心。雖然兩農場頂級蘋果的收成比例相同（皆為 60%），但是因為蘋果樹數量與蘋果樹產量不同，所以兩農場頂級蘋果收成的總量並不會相同。

三、 作答注意事項

1. 不要留白、盡力作答

PISA 試題的評分並未採用答錯扣分的機制，因此對於有疑慮或無法確定答案的試題仍可嘗試作答。開放式問答題也是一樣，可根據題意試著寫一些推論或計算，都有機會獲得分數。

2. 彈性思考、多元解題

PISA 評量主要是解決真實生活中的問題，因此作答時不要拘泥於特定的解題策略，只要能解決問題的都是好方法，即使是土法煉鋼或嘗試錯誤法都可使用。

3. 計算精確、過程詳盡

PISA 試題是由各國專家學者所研發，藉由試題瞭解學生的各種數學能力。計算和推理過程的呈現是評估數學能力最常用的方式，因此作答要完整詳細，且需寫在規定的作答區裡（不要寫在作答區外或計算紙上）。

4. 善用資訊、說理有據

在 PISA 數學試題的開放性問答題裡，相關的資訊通常會以圖形或表格來呈現，然後要求學生對一項陳述判斷對或錯、支持或反對，並提出論證說明。此類題型通常會有『請依據題意』、『請依據上圖』或『請根據表格中的數據』等字句，提醒學生以問題或圖表中的資訊與數據做為作答的依據。所以，不要隨性地以自己的經驗或感受回答問題，應根據題意引用圖表相關的數據進行推論，並以數學概念回答或詮釋。

5. 評析答案、回顧反思

PISA 試題大多與生活情境相關，透過數學解法所獲得的答案後，需進一步檢驗其合理性，並以現實情境觀點來解讀與批判數學結果。

伍、 結語

PISA 數學素養評量強調建構式的反應，加入開放式問答題，希望學生在試題背景訊息下，靈活運用自己的知識和技能解決實際問題。然而，一直以來，我國教育對數學素養這一方面的教學與評量都缺乏具體的教學綱要，學生在利用數據或資訊進行數學推理和論證的能力，也相對地較為薄弱。PISA 數學評量為我們的數學學習提供了一個參照標準，老師們可以借鑒 PISA 數學素養的構念與本文所提供學生作答反應常犯的錯誤，進行教學的因應調整，幫助學生提高數學學習。下列整理了一些教學建議，以提供教師參考

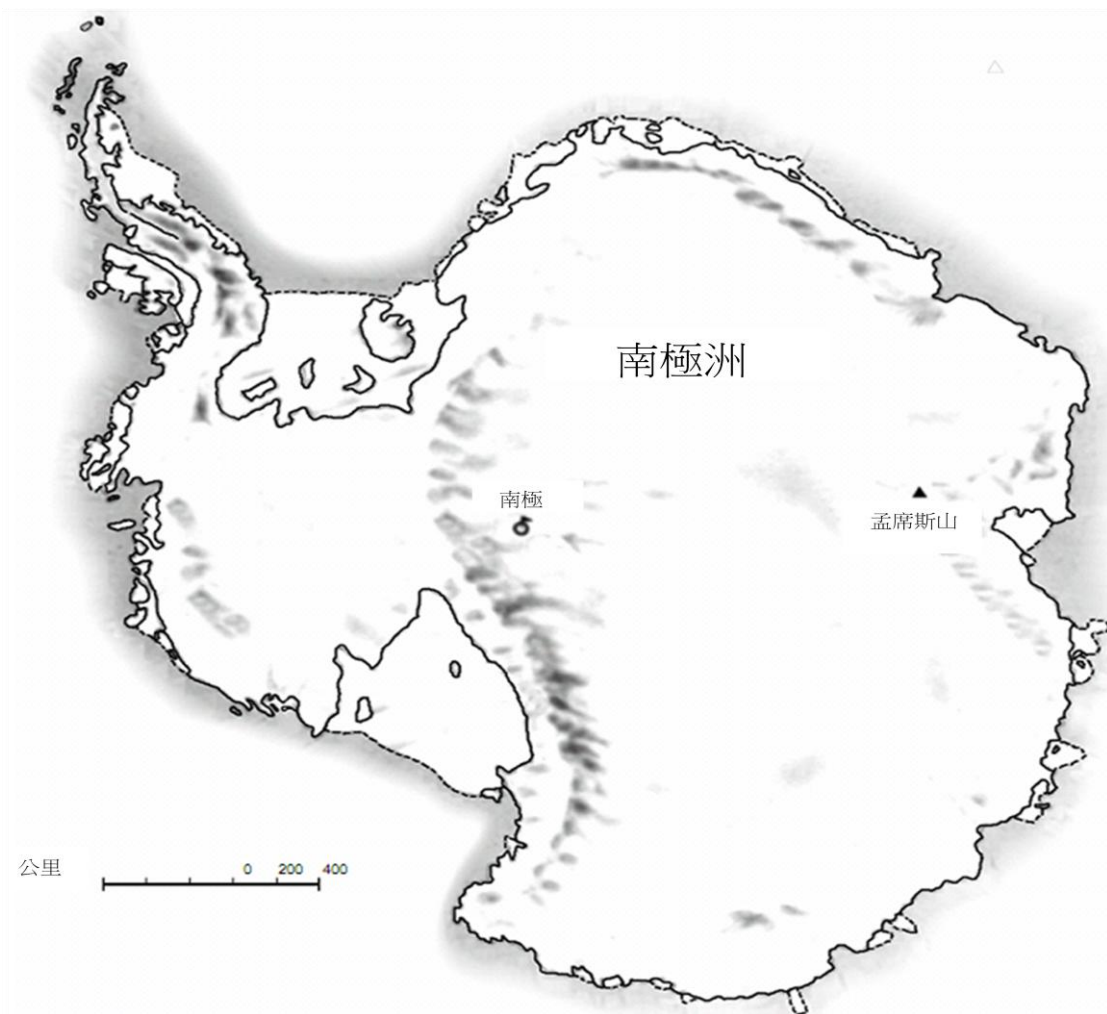
1. 指導學生讀題，透過錯誤類型的評析，進行批判與反思，給予學生思考的時間，不要太快提供策略或標準答案。
2. 嘗試加入不同試題類型於段考或平時考中，或增加開放性試題及非例行性試題，提升學生數學思維與溝通能力的訓練。
3. 運用前述的作答建議來鼓勵學生進行嘗試，老師可從旁協助學生修正其用語的正確性，提升精確和嚴謹表達與說理的能力。
4. 提供時事的刺激與批判的實作，嘗試運用數學的觀點進行詮釋。
5. 加強學生對全球化議題的敏銳度，例如全球暖化、貨幣兌換、時差換算等。
6. 增加測量工具（如計算機、圓規與直尺等）使用與操作的機會。
7. 透過 PISA 試題的仿作與練習，提升學生的解題經驗與老師對學生的瞭解，進而調整教與學的策略。
8. 加強數學與學生生活的連結，例如運用估測活動強化學生的空間感與量感。

參加國際評量終究會進行各國學生成績的比較，希望本應試指南能提供學生在作答時一點小小的幫助，不要因為不適應而發揮不了真正的實力。期待我們的孩子都能成為最具競爭力的人。

陸、 樣本試題與學生作答反應分析示例

大陸面積

下圖為南極洲地圖



問題 2：大陸面積

M148Q02

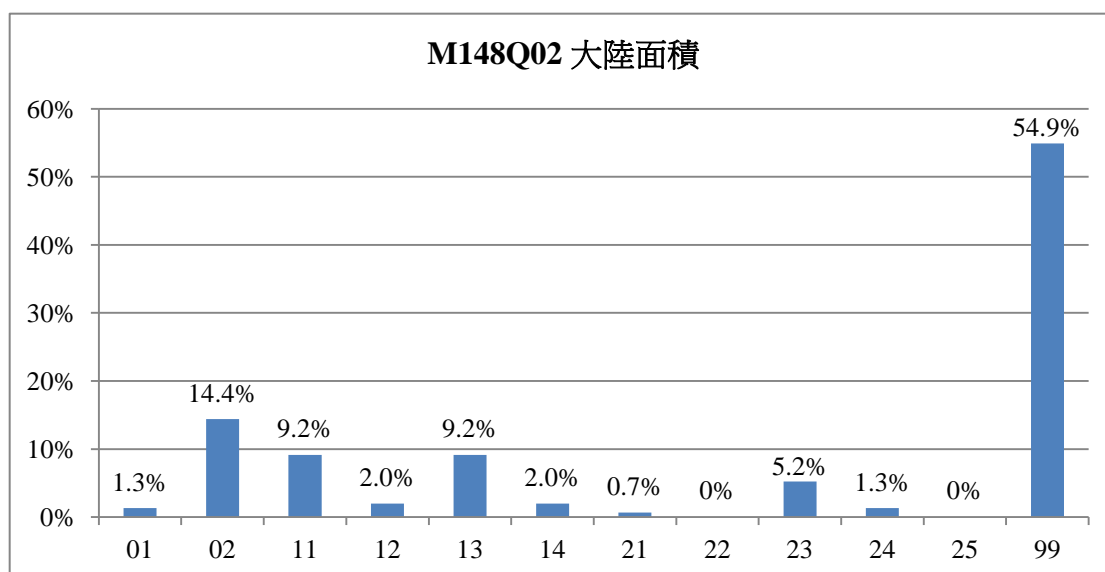
利用地圖的比例尺，估算出南極洲的面積。

寫出你的作法並解釋你是如何估計的。（若利用作圖能幫助你估計的話，可直接畫在地圖上。）

大陸面積 問題 2 計分

估計方法	代號		
	滿分 正確答案： 介於 12,000,000 和 18,000,000 平 方公里之間。	部份分數 正確方法但答案 不正確或不完整。	零分
畫一個長方形	21	11	—
畫一個圓	22	12	—
增加一些規則的圖形	23	13	—
其他正確方法	24	14	—
沒有顯示	25	—	—
周長	—	—	01
其他不正確方法	—	—	02
沒有作答	—	—	99

答題統計：



學生常犯的錯誤：

- 計算錯誤、比例尺用錯或未使用比例尺。
- 14400km^2 ，以一個矩形把整個南極洲圍住，再計算矩形的面積就大約是整個南極洲的面積。
- 將南極洲切割成兩個梯形及一個正方形，用尺量出大約長度再用比例尺計算【 $2(5+2)/2+(5+2)/2+2*2$ 】*400=5000。
- 先畫一個長方形，再把多出來的面積補進空缺的地方（只有敘述，沒有計算過程，也沒有使用比例尺）。
- 沒有作答。

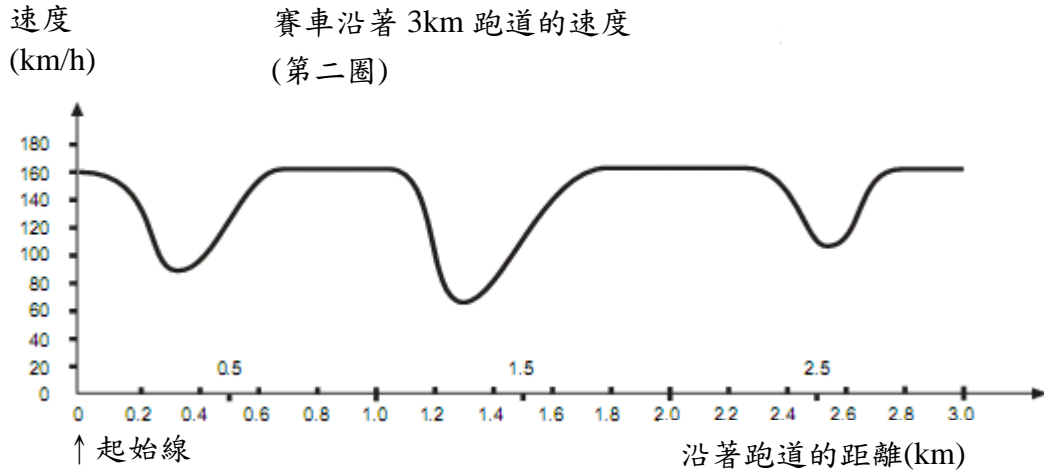
作答建議：

比例尺的問題，在真實生活中經常使用，在 PISA 數學試題也很經常出現。此類型試題的答案通常是一個範圍或區間，因此，作答時建議：

1. 使用測量工具，例如：尺，可以提高估計值的準確性，確保估計值會落在正確答案的範圍裡。
2. 要記得將計算結果依比例尺轉換成實際數值。另外，因為轉換後的實際數值通常比較大，建議使用計算機作為輔助，避免計算錯誤。
3. 正確使用比例尺。比例尺並不是都以 1 公分：50 公里（或 100 公里）的換算方式。在本例題中的比例尺比較特殊是 0.7 公分：200 公里，換算時要特別注意。
4. 儘量作答。可根據題意試著寫一些推論或計算，都有機會獲得分數。

賽車速度

下圖顯示一輛賽車在跑第二圈時，沿著一段 3km 長的平坦跑道之速度變化。



問題 1：賽車速度

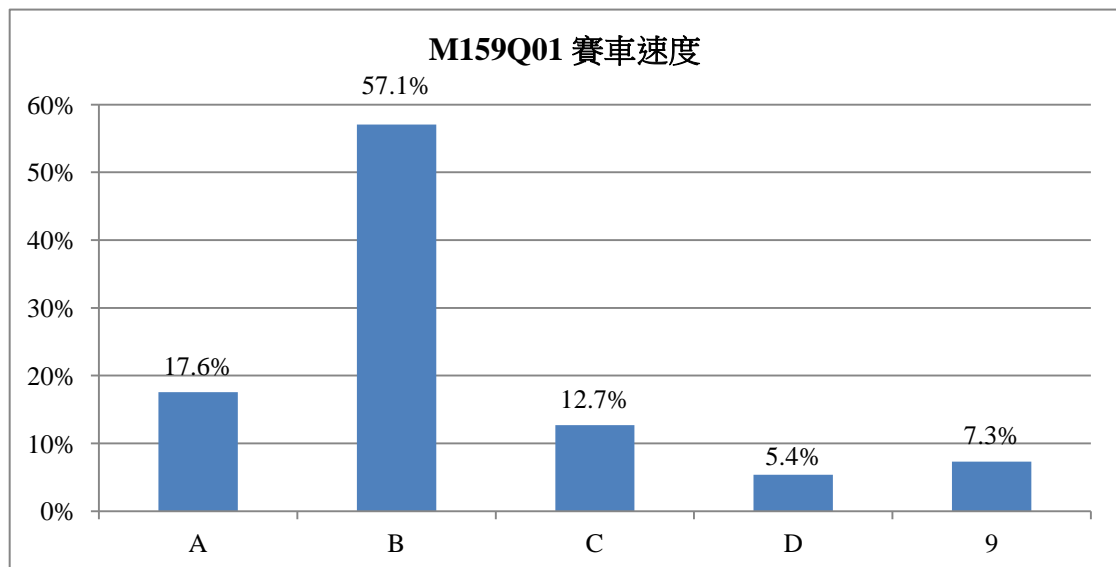
M159Q01

從起始線到最長一段直線跑道的開始處，距離大約為何？

- A 0.5 km
- B 1.5 km
- C 2.3 km
- D 2.6 km

正確答案： B

答題統計：



學生常犯的錯誤：

- 誤認為賽道一開始一定是『最長且平直』的地方。(17.6% 選 A)
- 誤認為減速最少的就是『最長且平直』的地方。(12.7% 選 C)
- 不清楚賽車在直線區 (1.5km~2.3km)，不但可以加速，還可以維持高速行駛。

作答建議：

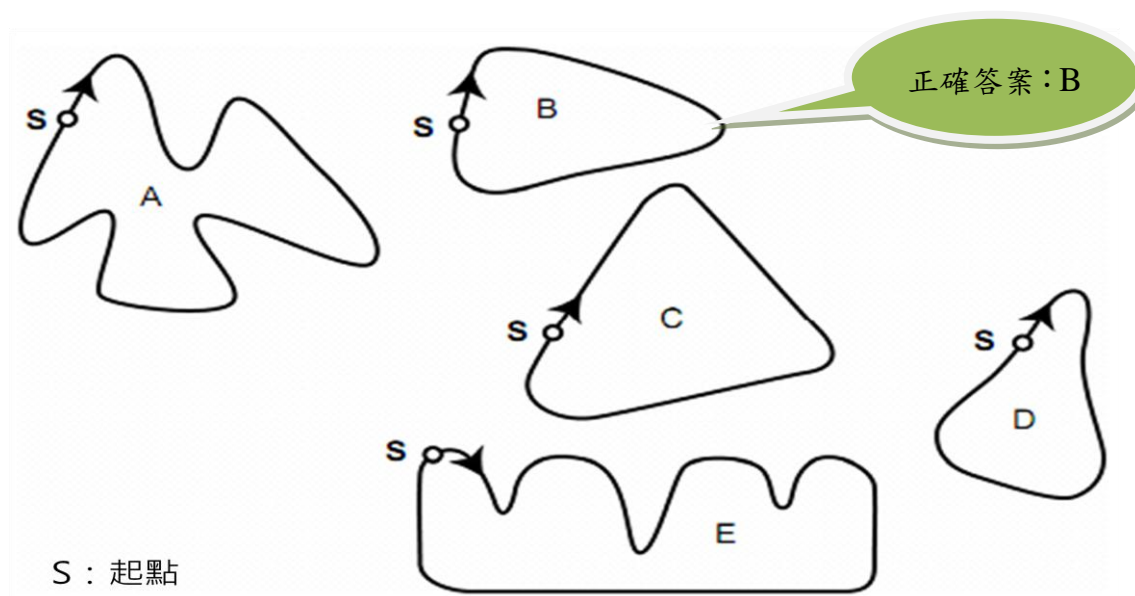
要嘗試理解題意、釐清問題，然後再作答。

問題 4：賽車速度

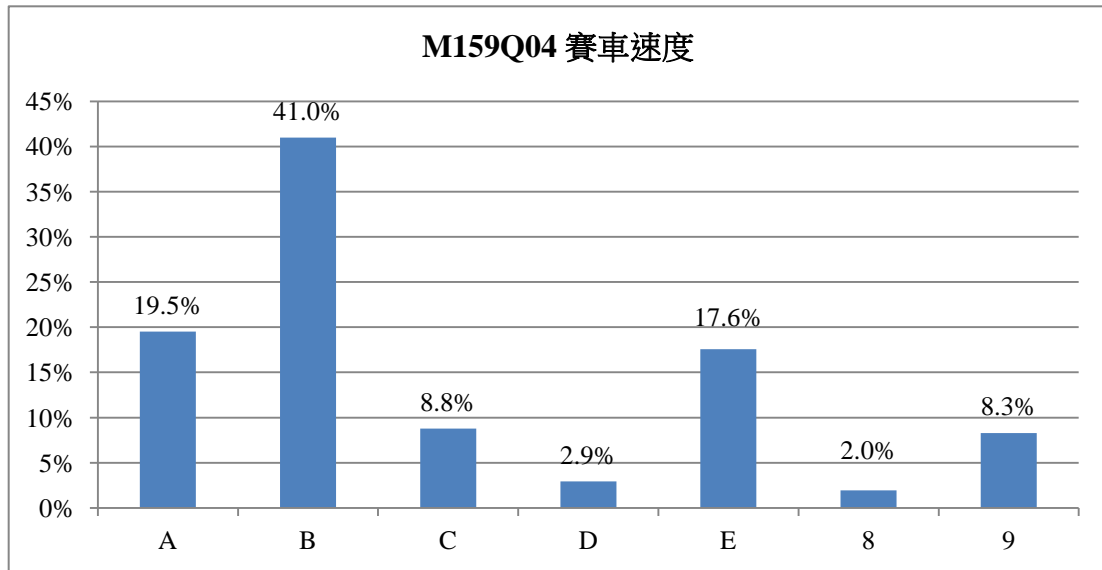
M159Q04

這裡有五個跑道圖：

沿著哪個跑道駕駛賽車，可繪出前述的速度變化圖？



答題統計：



註：『8』為學生圈選二個以上選項。

學生常犯的錯誤：

- 直接將題目中的速度變化圖當成軌道圖（17.6% 選 E）。
- 錯誤的認知。誤認為速度增、減變化的地方軌道也要有凹、凸的情況（19.5% 選 A）。
- 未考慮轉彎處（速度遞減後又增加）與直線區（加速並維持高速行駛）的相對位置（約 12% 選 C 或 D）。

作答建議：

要嘗試理解題意、釐清問題，然後再作答。此處要能將速度變化圖與賽車跑道作連結。

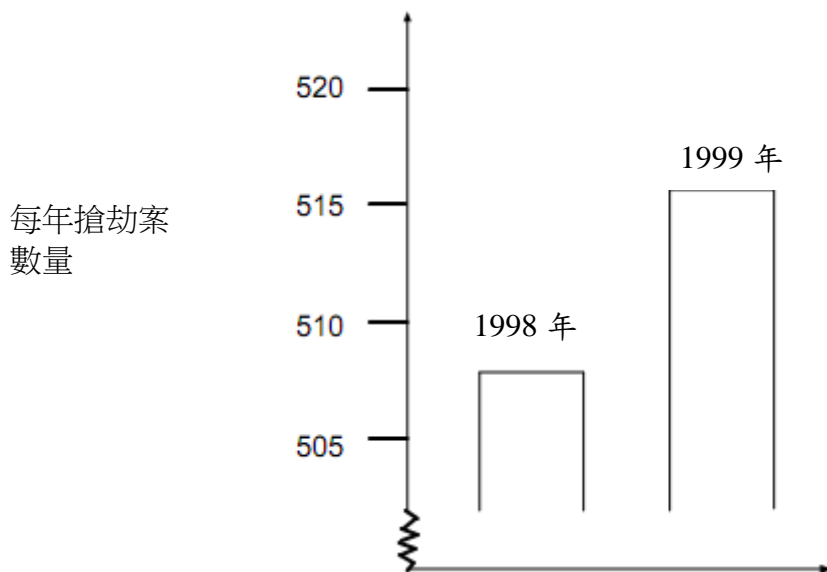
搶劫

問題 1：搶劫

M179Q01- 01 02 03 04 11 12 21 22 23 99

電視主播呈現了下圖並報導：

「圖表顯示，從 1998 年到 1999 年搶劫案數量有巨幅的上升。」



你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案。

搶劫 問題 1 計分

滿分

代號 21：不，不合理。指出我們看到的只是整個圖表的其中一小部分。

代號 22：不，不合理。用比率或百分比的數字作論據，論點正確。

代號 23：要有趨勢的數據資料才可作出判斷。

部分分數

代號 11：不，不合理，但欠缺詳細解釋。

代號 12：不，不合理。方法正確但有輕微計算錯誤。

零分

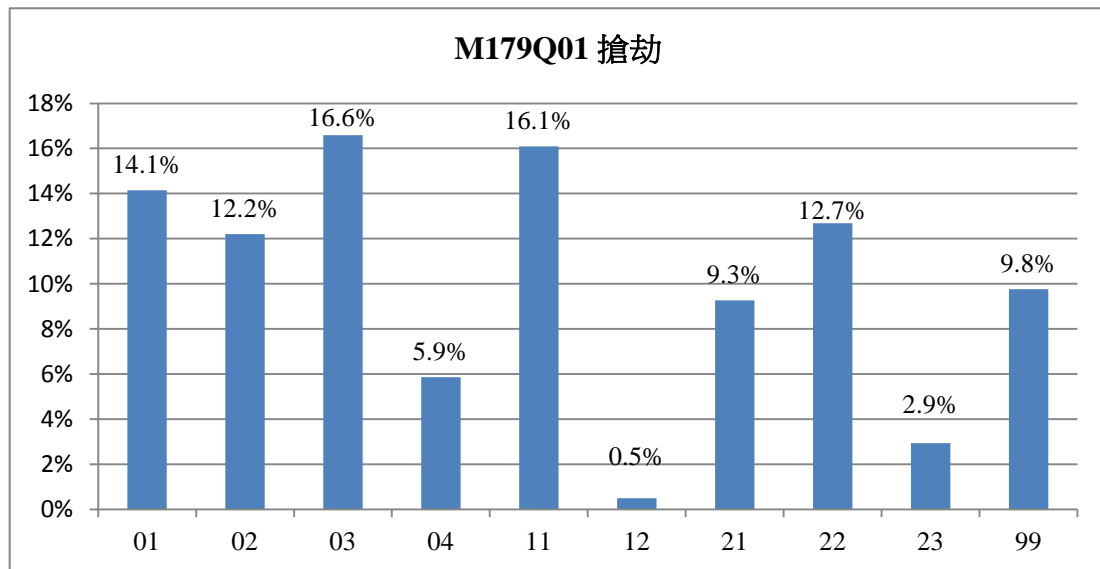
代號 01： 不。表示不合理，但沒有提供解釋、沒有充分解釋或解釋不正確。

代號 02： 是。基於圖表的形狀，因而指出搶劫案數字雙倍增加。

代號 03： 是。沒有提供解釋，或提供代號 02 以外的解釋。

代號 04： 其他答案

答題統計：



學生常犯的錯誤：

1. 主觀的陳述自己對問題的看法，忘記或忽略使用題目中圖表提供的資訊。
 - 是，對我來說，超過一個都算多。
 - 是，現在科技越來越發達。
 - 是，因為這幾年來經濟不景氣，有人為了生活做出做壞的打算，所以才會搶劫。
 - 合理，因為每一年的治安越來越亂了！
2. 只注意到題目中的部分資訊，未能掌握關鍵的資訊（圖形中的省略符號），導致作答反應不夠充份。
 - 當然合理，圖表上升那麼多怎麼不合理呢！

- 因為犯罪的長條圖，是越長條，數量越多。
- 是，因為圖表表達得很清楚，1999 比 1998 確實多很多。
- 否，並沒有巨幅上升。

作答建議：

利用圖形或表格的資料為依據進行推論、獲得結果，是 PISA 數學試題中常見的開放性問答題類型之一。這類型的試題在題目中一定有『請依據題意』、『請依據上圖』或『請根據表格中的數據』等字句，提示學生應以圖表的資料做為作答的依據。作答時不要以主觀的意識來回答問題，請務必使用圖、表中的資訊，並注意圖形（x 軸、y 軸）或表格（公里／小時或公尺／秒）的單位與省略符號的使用，才能正確作答。

柒、 參考文獻

OECD (2010). *PISA 2012 Mathematics Framework*. OECD, Paris. Retrieved from <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>